Curso: Introducción a los Modelos Computables de Equilibrio General

`5 sesiones de 2h: martes 6, 13, 20, 27 de mayo y 3 junio a las 16:30`*

Profesor: José-María Da-Rocha
Facultad de Comercio, Universidade de Vigo†

Mayo 2025

Resumen

Racionalizamos una tabla input-output de 2 sectores utilizando un modelo de una economía formada por hogares y empresas. Los hogares, que están dotados con capital y trabajo, demandan bienes finales (de consumo e inversión) y ofertan a las empresas de cada sector parte de sus dotaciones de capital y trabajo. Las empresas de cada sector, que utilizan consumos intermedios, ofertan bienes que venden para obtener las rentas (del trabajo y del capital) con los que remuneran a los hogares por el uso de los factores. En este curso, aprenderemos a: uno, definir el equilibrio de esta economía; dos, a calibrar el modelos para reproducir la tabla input-output que resume la contabilidad sectorial (pagos e ingresos de los sectores) y agregada (PIB por el lado de la demanda y valor añadido por el lado del ingreso) de la economía; tres, a escribir y resolver un código que obtener el equilibrio de la economía que permite reproducir los datos de la tabla input-output; y, finalmente, a utilizar el programa para generar experimentos (cuyo resultado conocemos previamente) para comprobar el correcto funcionamiento del modelo.

*Seminario del Departamento de Funadamentos del Análisis Económico, Aula 128, Facultad CC. Económicas y Empresariales, USC.

†Rúa do Conde de Torrecedeira, 105,Vigo-32008
(e-mail: jmrocha@uvigo.es).

Table 1: Ofertas y Demandas

	Sectores		Demanda final		
	Prim	Man	Consumo	Inver.	Total
Primario	2	3	8	2	15
Manufacturas	4	5	11	3	23
Sueldos y Salarios	5	11	0	0	16
Ingresos por Capital	4	4	0	0	8
Total	15	23	19	5	

La fuente de datos es una matriz Input-Output. Esta matriz presenta el valor de todas las transacciones reales realizadas en la economía durante un año. Las columnas muestran los gastos realizados por un sector y las filas muestran los ingresos. A partir de estas tablas es posible obtener las cuentas nacionales:

Table 2: PIB

Demanda		Ingreso	
Consumo	19	Sueldos y Salarios	16
Inversion	5	Ingresos por Capital	8
PIB	24	PIB	24

1 Modelo

La economía esta formada por 3 tipo de agentes: empresa de bienes, instituciones de inversión y consumidores. Las empresas utilizan las dotaciones de capital, $\overline{k}$ y trabajo $\overline{l}$ para generar valor añadido, $r\overline{k} + w\overline{l}$ y (el valor) de los bienes intermedios $p\sum_j x_{i,j}$, Los conumidores demandan los bienes finales, de consumo, c_i e inversióm i_i. Finalmente, la inversion , c_{inv} es poducida ensamblando bienes de ambos sectores.

1.1 Consumidores

Los consumidores son los propietarios las dotaciones de capital, $\overline{K}$ y trabajo $\overline{L}$ y utilizan la rentas obtenidas $r\overline{K} + w\overline{L}$ para comprar bienes (de consumo e inversión).

1. **Preferencias**: reproducen la canasta de bienes de consumo (los consumidores destinan una fracción constante de su renta a comprar bienes) y una tasa de ahorro (gasto de inversión sobre ingreso) constante. Formalmente:

$$\theta_{\text{pri}} \log c_{\text{pri}} + \theta_{\text{man}} \log c_{\text{man}} + \theta_{\text{inv}} \log c_{\text{inv}}$$

2. Los **ingresos del consumidor**, $Y_{\text{consumidor}}$, son la suma de ingresos de capital, $r\bar{k}$, trabajo, $w\bar{l}$.

$$Y_{\text{consumidor}} = r\bar{k} + w\bar{l}$$

3. El consumidor paga los bienes de consumo y de inversion a **precios**, p_i

$$p_{\text{pri}}c_{\text{pri}} + p_{\text{man}}c_{\text{man}} + p_{\text{inv}}c_{\text{inv}}$$

4. Las **condiciones de primer orden** de este problema son

$$\theta_i = \frac{p_i c_i}{Y_{\text{consumidor}}}$$

1.2 Empresas

Utiliza capital y trabajo para generar valor añadido y la demanda **bienes intermedios**, x_i.

1. **Tecnología para generar valor añadido**: rendimientos constantes a escala. Las empresas (de cada sector) combinan capital y trabajo para producir y_i unidades del bien i.

$$y_i = \beta_i k_i^{\alpha_i} l_i^{(1-\alpha_i)}$$

y utiliza bienes intermedios (con una tencnología Leontieff)

$$y_i = \min\left[\frac{x_{\text{pri},i}}{a_{\text{pri},i}}, \frac{x_{\text{man},i}}{a_{\text{man},i}}, \beta_i k_i^{\alpha_i} l_i^{(1-\alpha_i)}\right]$$

La demanda de bienes intermedios es

$$\begin{aligned} x_{\text{pri},i} &= a_{\text{pri},i} y_i \\ x_{\text{man},i} &= a_{\text{man},i} y_i \end{aligned}$$

2. La empresa minimiza los **costes** de producir de valor añadido con una unidad del factor compuesto

$$\min r k_i + w l_i \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{1}_{\text{vab}} = k_i^{\alpha_i} l_i^{(1-\alpha_i)}$$

La solución de este problema es igual a:

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{1}{\beta_i}\left(\frac{\alpha_i w}{(1-\alpha_i) r}\right)^{1-\alpha_i} y_i \\ l_i &= \frac{1}{\beta_i}\left(\frac{(1-\alpha_i) r}{\alpha_i w}\right)^{\alpha_i} y_i \\ x_{\text{pri},i} &= a_{\text{pri},i} y_i \\ x_{\text{man},i} &= a_{\text{man},i} y_i \end{aligned}$$

El lagrangiano se escribe

$$L = rk_i + wl_i - \lambda\left[\beta_i k_i^{\alpha_i} l_i^{(1-\alpha_i)} - y_{i,d}\right]$$

y las c.p.o. son:

$$\begin{aligned} r &= \lambda\alpha_i k_i^{\alpha_i - 1} l_i^{(1-\alpha_i)} \\ w &= \lambda(1-\alpha_i) k_i^{\alpha_i} l_i^{(-\alpha_i)} \\ \mathbf{1}_{\text{vab}} &= k_i^{\alpha_i} l_i^{(1-\alpha_i)} \end{aligned}$$

Multiplicando la (1) por k_i y (1) por l_i

$$k_i = \lambda\frac{\alpha_i}{r}\mathbf{1}_{\text{vab}} \quad (1)$$

$$l_i = \lambda\frac{(1-\alpha_i)}{w}\mathbf{1}_{\text{vab}} \quad (2)$$

y sustituyendo en (1) obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{\left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^{\alpha_i}\left(\frac{1-\alpha_i}{w}\right)^{1-\alpha_i}}$$

por tanto las demanda total de factores de cada sector se escribe

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{1}{\beta_i}\left(\frac{\alpha_i w}{(1-\alpha_i)r}\right)^{1-\alpha_i} y_{d,i} \\ l_i &= \frac{1}{\beta_i}\left(\frac{(1-\alpha_i)r}{\alpha_i w}\right)^{\alpha_i} y_{d,i} \end{aligned}$$

---

3. La empresa paga los bienes intermedios y vende a **precios**, $p_{i,d}$. Sus beneficios son:

$$\pi_{i,d} = p_{i,d}y_{i,d} - p_{\text{pri}}x_{\text{pri},i} - p_{\text{man}}x_{\text{man},i} - rk_i - wl_i = 0.$$

Por tanto **los precios** se obtienen substituyendo las demandas de factores y de bienes intermedios

$$p_i = p_{\text{pri}}a_{\text{pri},i} + p_{\text{man}}a_{\text{man},i} + r\frac{1}{\beta_i}\left(\frac{\alpha_i w}{(1-\alpha_i)r}\right)^{1-\alpha_i} + w\frac{1}{\beta_i}\left(\frac{(1-\alpha_i)r}{\alpha_i w}\right)^{\alpha_i}$$

es decir

$$p_i = \frac{1}{\beta_i}\left[\left(\frac{r}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}\left(\frac{w}{(1-\alpha_i)}\right)^{(1-\alpha_i)}\right] + \sum_{k=1}^{ns} p_k a_{k,i}$$

1.3 Instituciones de inversión

1. **Tecnología para generar inversion**: tencnología Leontieff

$$y_{\mathrm{inv}} = \min\left[\frac{x_{\mathrm{pri,inv}}}{a_{\mathrm{pri,inv}}}, \frac{x_{\mathrm{man,inv}}}{a_{\mathrm{man,inv}}}\right]$$

   La demanda de bienes intermedios generada por el gasto en inversión es igual a:

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{pri,inv}} &= a_{\mathrm{pri,inv}} y_{\mathrm{inv}} \\ x_{\mathrm{man,inv}} &= a_{\mathrm{man,inv}} y_{\mathrm{inv}} \end{aligned}$$

2. La empresa hace beneficios cero

$$\pi_{\mathrm{inv}} = p_{\mathrm{inv}} y_{\mathrm{inv}} - p_{\mathrm{pri}} x_{\mathrm{pri,inv}} - p_{\mathrm{man}} x_{\mathrm{man,inv}} = 0.$$

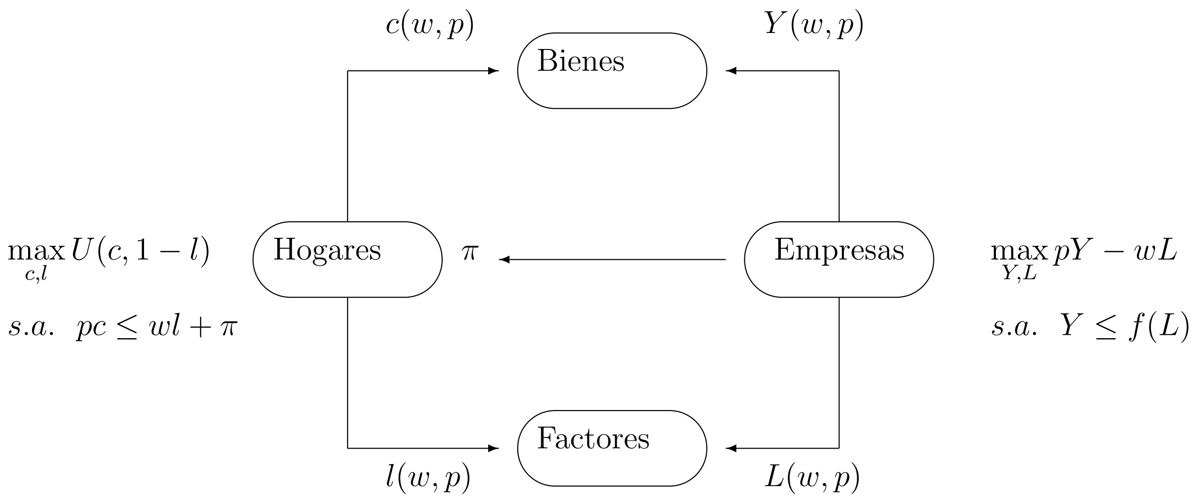
   Por tanto **los precios de inversión** se obtienen substituyendo las demandas de factores y de bienes intermedios, es decir

$$p_{\mathrm{inv}} = p_{\mathrm{pri}} a_{\mathrm{pri,inv}} + p_{\mathrm{man}} a_{\mathrm{man,inv}}$$

Table 3: Representación matricial de la economía

	Ingresos				
	Bienes intermedios		Bienes Finales		
	Primarios	Manufacturas	Consumo	Inversión	Total
Primarios	$p_{\mathrm{pri}} x_{\mathrm{pri,pri}}$	$p_{\mathrm{pri}} x_{\mathrm{pri,man}}$	$p_{\mathrm{pri}} c_{\mathrm{pri}}$	$p_{\mathrm{pri}} x_{\mathrm{pri},inv}$	$p_{\mathrm{pri}} y_{\mathrm{pri}}$
Manufacturas	$p_{\mathrm{man}} x_{\mathrm{man,pri}}$	$p_{\mathrm{man}} x_{\mathrm{man,man}}$	$p_{\mathrm{man}} c_{\mathrm{man}}$	$p_{\mathrm{man}} x_{\mathrm{man},inv}$	$p_{\mathrm{man}} y_{\mathrm{man}}$
Rentas del trabajo	$w l_{\mathrm{pri}}$	$w l_{\mathrm{man}}$			$w\bar{l}$
Rentas del capital	$r k_{\mathrm{pri}}$	$r k_{\mathrm{man}}$			$r\bar{k}$
Total	$p_{\mathrm{pri}} y_{\mathrm{pri}}$	$p_{\mathrm{man}} y_{\mathrm{man}}$	C	I	

Figure 1: Flujo circular de la renta



1.4 Definición de equilibrio:

Un equiibrio es una lista de precios ($\hat{p}_{pri}$ $\hat{p}_{man}$ $\hat{p}_{inv}$ $\hat{r}$ $\hat{w}$), planes de produccón de las esmpresas de bienes primarios ($\hat{y}_{pri}$ $\hat{x}_{pri,pri}$ $\hat{x}_{man,pri}$ $\hat{l}_{pri}$ $\hat{k}_{pri}$), de bienes de manufacturas ($\hat{y}_{man}$ $\hat{x}_{pri,man}$ $\hat{x}_{man,man}$ $\hat{l}_{man}$ $\hat{k}_{man}$) de bienes de inversión ($\hat{y}_{inv}$ $\hat{x}_{pri,inv}$ $\hat{x}_{man,inv}$) y demanda de bienes finales ($\hat{c}_{pri}$ $\hat{c}_{man}$ $\hat{c}_{ser}$ $\hat{c}_{inv}$) tales que:

- **Optimalidad**: Dados los precios p_i, las cantidades totales, y_i, salarios w, rendimiento del capital, r,
  - Empresas minimizan costes y hacen beneficios cero

$$
\begin{aligned}
p_{,i} &= \frac{1}{\beta_i}\left[\left(\frac{r}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}\left(\frac{w}{(1-\alpha_i)}\right)^{(1-\alpha_i)}\right] + \sum_{k=1}^{ns} p_k a_{k,i} \\
k_i &= \frac{1}{\beta_i}\left(\frac{\alpha_i w}{(1-\alpha_i)r}\right)^{1-\alpha_i} y_i \\
l_i &= \frac{1}{\beta_i}\left(\frac{(1-\alpha_i)r}{\alpha_i w}\right)^{\alpha_i} y_i \\
x_{\text{pri},i} &= a_{\text{pri},i} y_i \\
x_{\text{man},i} &= a_{\text{man},i} y_i \\
x_{i,inv} &= a_{i,inv} c_{ns+1}
\end{aligned}
$$

  - Consumidores demandan bienes de consum y realizan inversiones maximizando su utilidad

$$
c_i = \frac{\theta_i(r\bar{k} + w\bar{l})}{p_i}
$$

- **Factibilidad**:
  - Planes de produccion son mutamente compatibles (la demanda iguala la oferta de bienes)

$$
y_i = c_i - x_{\text{inv}} - \sum_k x_{i,k}
$$

  - Los mercados de factores se vacían

$$
\begin{aligned}
l_{\text{pri}} + l_{\text{man}} &= \bar{l} \\
k_{\text{pri}} + k_{\text{man}} &= \bar{k}
\end{aligned}
$$

2 Calibración

Para realizar una buena caliración es precios obtener los parámetros utilizando el modelo y posteriormente, probar que el modelo genera los datos cuando se utilizan los parámetros calibrados.

2.1 Parámetros

Paso 1 Nomalizar precios (dado que las funciones de exceso de demanda son homogéneas de grado 0)

$$p_{\text{pri}} = p_{\text{man}} = w = r = 1$$

Ello permite calibrar la economía base utilizando los valores de los intercambios registrados en la representación matricial de la economía. Es decir,

Table 4: Datos y modelo

Datos					
	Sectores		Demanda final		
	Prim	Man	Consumo	Inver.	Total
Primario	2	3	8	2	15
Manufacturas	4	5	11	3	23
Sueldos y Salarios	5	11	0	0	16
Ingresos por Capital	4	4	0	0	8
Total	15	23	19	5	
Modelo base					
	Sectores		Demanda final		
	Prim	Man	Consumo	Inver.	Total
Primarios	$x_{\text{pri,pri}}$	$x_{\text{pri,man}}$	c_{pri}	$x_{\text{pri},inv}$	y_{pri}
Manufacturas	$x_{\text{man,pri}}$	$x_{\text{man,man}}$	c_{man}	$x_{\text{man},inv}$	y_{man}
Rentas del trabajo	l_{pri}	l_{man}			$\bar{l}$
Rentas del capital	k_{pri}	k_{man}			$\bar{k}$
Total	y_{pri}	y_{man}	C	I	

Paso 2 Recolectar de los problemas que resuelven los agentes de la economia los parámetros que debemos calibrar para que el modelo reproduzca los datos. La tabla muestra que en nuestro ejemplo tenemos que calibrar 15 parámetros: 2 párametros son las dotaciones de la economía; 3 para medir la composición de la canasta de los bienes de consumo de la economia y la tasa de ahorro; 2 participaciones del capital y 2 parámetros de escala; y, finalmente 6, coeficientes técnicos de Leontief.

Paso 3 Las dotaciones son inmediatas:

Table 5: Parámetros

Parámetro		Estadístico
Dotaciones		
	$\overline{k}$,	capital total de la economía
	$\overline{l}$,	trabajo total de la economía
Preferencias		
	θ_{pri}	fracción del gasto del consumidor en b. prim.
	θ_{man}	fracción del gasto del consumidor en manu.
	θ_{inv}	tasa de ahorro
Tecnología		
	α_{pri}, α_{man}	fracción del VA destinado a rentas del capital
	β_{pri}, β_{man}	escala (ajuste de unidades)
	$a_{\text{pri,pri}}$, $a_{\text{pri,man}}$, $a_{\text{pri,inv}}$, $a_{\text{pri,man}}$, $a_{\text{man,man}}$, $a_{\text{man,inv}}$.	coeficientes técnicos (matriz inversa de Leontieff)

$$
\begin{aligned}
\bar{l} &= 16 \\
\overline{k} &= 8
\end{aligned}
$$

Paso 4 La tasa de ahorro y la composición de la canasta de los bienes de consumo de la economia, se obtienes de las demandas de los bienes finales. En la economía base

$$
\begin{aligned}
c_{\text{pri}} &= \frac{\theta_{\text{pri}}(\bar{l}+\overline{k})}{1} \Rightarrow \theta_{\text{pri}} = \frac{c_{\text{pri}}}{(\bar{l}+\overline{k})} = \frac{8}{24} \\
c_{\text{man}} &= \frac{\theta_{\text{man}}(\bar{l}+\overline{k})}{1} \Rightarrow \theta_{\text{man}} = \frac{c_{\text{man}}}{(\bar{l}+\overline{k})} = \frac{11}{24} \\
c_{inv} &= \frac{\theta_{inv}(\bar{l}+\overline{k})}{1} \Rightarrow \theta_{\text{inv}} = \frac{c_{\text{inv}}}{(\bar{l}+\overline{k})} = \frac{5}{24}
\end{aligned}
$$

Dado que los parametros θ miden la composición del gasto final de la economía, deben sumar la unidad. Comprobamos,

$$\frac{8}{24} + \frac{11}{24} + \frac{5}{24} = 1.$$

Paso 5 Las participaciones del capital en el valor agergado se obtinen de las c.p.o. del problema de minimización de costes de las empresas. De las ecuaciones (1) y (2) obtenemos que la participacion del capital de cada sector es proporcional a la intensidad de uso. Formalmente

$$\begin{aligned}
\frac{k_{\text{pri}}}{l_{\text{pri}}} &= \frac{\alpha_{\text{pri}}}{(1-\alpha_{\text{pri}})} \Rightarrow \frac{\alpha_{\text{pri}}}{(1-\alpha_{\text{pri}})} = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha_{\text{pri}} = \frac{\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}} = \frac{4}{9} \\
\frac{k_{\text{man}}}{l_{\text{man}}} &= \frac{\alpha_{\text{man}}}{(1-\alpha_{\text{man}})} \Rightarrow \frac{\alpha_{\text{man}}}{(1-\alpha_{\text{man}})} = \frac{4}{11} \Rightarrow \alpha_{\text{man}} = \frac{\frac{4}{11}}{1+\frac{4}{11}} = \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

Paso 6 Los parámetros de escala, se obtinenen de las demanda de trabajo

$$\begin{aligned}
l_{\text{pri}} &= \frac{1}{\beta_{\text{pri}}}\left(\frac{(1-\alpha_{\text{pri}})}{\alpha_{\text{pri}}}\right)^{\alpha_{\text{pri}}} \overline{y}_{\text{pri}} \Rightarrow \beta_{\text{pri}} = \frac{\overline{y}_{\text{pri}}}{l_{\text{pri}}}\left(\frac{(1-\alpha_{\text{pri}})}{\alpha_{\text{pri}}}\right)^{\alpha_{\text{pri}}} = \frac{15}{5}\left(\frac{5}{4}\right)^{4/9} \\
l_{\text{man}} &= \frac{1}{\beta_{\text{man}}}\left(\frac{(1-\alpha_{\text{man}})}{\alpha_{\text{man}}}\right)^{\alpha_{\text{man}}} \overline{y}_{\text{man}} \Rightarrow \beta_{\text{man}} = \frac{\overline{y}_{\text{man}}}{l_{\text{man}}}\left(\frac{(1-\alpha_{\text{man}})}{\alpha_{\text{man}}}\right)^{\alpha_{\text{man}}} = \frac{23}{11}\left(\frac{11}{4}\right)^{4/15}
\end{aligned}$$

Paso 7 Los coeficientes técnicos de Leontief. se obtienen de las demandas de bienes intermedios

$$\begin{aligned}
x_{\text{pri,pri}} &= a_{\text{pri,pri}} y_{\text{pri}} \\
x_{\text{pri,man}} &= a_{\text{pri,man}} y_{\text{man}} \\
x_{\text{man,pri}} &= a_{\text{man,pri}} y_{\text{pri}} \\
x_{\text{man,man}} &= a_{\text{man,man}} y_{\text{man}}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{bmatrix} a_{\text{pri,pri}} & a_{\text{pri,man}} \\ a_{\text{man,pri}} & a_{\text{man,man}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & \frac{3}{23} \\ \frac{4}{15} & \frac{5}{23} \end{bmatrix}$$

Paso 8 Los coeficientes técnicos de la tecnología del bien de inversión.

$$\begin{aligned}
x_{\text{pri,inv}} &= a_{\text{pri,inv}} y_{\text{inv}} \\
x_{\text{man,inv}} &= a_{\text{man,inv}} y_{\text{inv}}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{bmatrix} a_{\text{pri,inv}} \\ a_{\text{man,inv}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Deben sumar la unidad. Comprobamos,

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1.$$

3 Reproducir los datos: algoritmo

Utiliza el siguiente algoritmo para reproducir la datos de la economía con los parámetros calibrados

- **Paso 1: semilla**
  - $w = 1$; $r = 1$; $\overline{p}_j = 1$; $\overline{y}_j = data$;
- **Paso 2: precios**

$$p_j = \frac{1}{\beta_j}\left[\left(\frac{r}{\alpha_j}\right)_j^{\alpha}\left(\frac{w}{(1-\alpha_j)}\right)^{(1-\alpha_j)}\right] + \sum_{i=1}^{ns}\overline{p}_i a(i,j)$$

- **Paso 3: demandas de factores**

$$k_i = \frac{1}{\beta_j}\left(\frac{\alpha_j w}{(1-\alpha_j)r}\right)^{1-\alpha_j}\overline{y}_j \quad l_j = \frac{1}{\beta_j}\left(\frac{(1-\alpha_j)r}{\alpha_j w}\right)^{\alpha_j}\overline{y}_j$$

- **Paso 4: precio de la inversión**

$$p_{inv} = a_{\text{pri},invi}p_{\text{pri}} + a_{\text{man},inv}p_{\text{man}}$$

- **Paso 5: demanda de bienes finales**

$$c_j = \frac{\theta_j(w\overline{l} + r\overline{k})}{p_j} \quad c_{inv} = \frac{\theta_{inv}(w\overline{l} + r\overline{k})}{p_{inv}}$$

- **Paso 6: demanda bienes intermedios**

$$x_{\text{pri},i} = a_{\text{pri},i}\overline{y}_i \; x_{\text{man},i} = a_{\text{man},i}\overline{y}_i \; x_{i,inv} = a_{i,inv}c_{ns+1}$$

- **Paso 7: evaluar el equilibrio.** 5 variables $(w, p_{\text{pri}}, p_{\text{man}}, y_{\text{pri}}, y_{\text{man}})$

  1. Los mercados de factores se vacian (recuerda que debido a la Ley de Walras, usaremos $w = 1$ como númerario y, por ello, solo utilizaremos un mercado de factores)

$$\text{ff}(1) = \overline{l} - \sum_{j=1}^{ns} l_j(.)$$

  2. Los precios y cantidades verifican

$$\text{ff(2+2+j)} = \overline{p}_j - p_j \quad \forall j = \text{pri}, \text{man}.$$

$$\text{ff(2+j)} = \overline{y}_j - \sum_{i=1}^{ns} x_{j,i}(.) - x_{j,inv} \quad \forall j = \text{pri}, \text{man}.$$